Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Matematika i informatika 2 (4) (2015), 15-47

# Neke osobine popločavanja ravni

**Jelena R. Radonjić**
**STŠ „Vožd Karađorđe” i OŠ „Radovan Kovačević - Maksim” Lebane**
**jecika82@gmail.com**

**Branimir V. Lapčević**
**OŠ „Stojan Novaković” Blace**
**banelapcevic@gmail.com**

**Dušan J. Simjanović**
**Prirodno-matematički fakultet u Nišu i Gimnazija „Svetozar Marković” Niš**
**dsimce@gmail.com**

## 1 Osnovne osobine popločavanja ravni

### 1.1 Matematička definicija popločavanja ravni

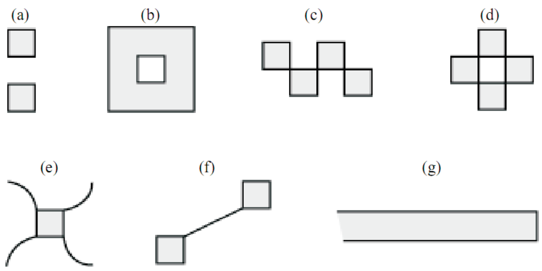
Pokrivanje ili popločavanje ravni je *prebrojiva* familija *zatvorenih skupova* $\mathcal{T}=\{T_1, T_2, ...\}$ koja pokriva ravan bez *praznina* ili *preklapanja*. Unija skupova $T_1, T_2, ...$ (tzv. pločice familije $\mathcal{T}$), pokriva celu ravan. Elementi $T_i$ familije $\mathcal{T}$ međusobno su disjunktni. Posmatrana ravan je deo Euklidske ravni elementarne geometrije.

Uslov „prebrojivosti” isključuje familije kod kojih je svaka pločica površine nula (kao što je tačka ili segment), ali i pored toga definicija dopušta popločavanja kod kojih neke pločice imaju neobične oblike i osobine. Nekoliko primera pločica takvih oblika prikazano je na slici 1.

Posmatraćemo pločice koje su zatvoreni *topološki diskovi*. Topološkim diskom možemo smatrati bilo koji skup ograničen jednom jednostavnom zatvorenom krivom (zatvorena kriva je ona kod koje se početak i kraj spajaju u jednoj tački i nema tačke ukrštanja ili grananja).

Na taj način, na slici 1 granična kriva pločica (a) i (b) nisu jednostavne, takođe i pločice (c), (d), (e) i (f) granične krive nisu jednostavne jer imaju presečne tačke ili grananja, a pločica (g) nije zatvorena krivom.

Dakle, uslov da su pločice zatvoreni topološki diskovi isključuje pločice koje imaju „neobične” oblike i osobine kao što su pločice sa slike 1. U definiciji popločavanja možemo zadati uslov: svaka pločica $T_i$ je zatvoren topološki disk.




Sl. 1: Primeri pločica neobičnih oblika i osobina. (a) Pločica koja nije povezana tj. koja se sastoji iz dva ili više odvojenih delova; (b) Pločica koja nije prosto povezana tj. koja obuhvata bar jednu prazninu; (c), (d) Pločice od kojih svaka prestaje da bude povezana po brisanju odgovarajućeg konačnog skupa tačaka; (e), (f) Pločice koje su napravljene delimično od segmenata lukova krivih ili drugih figura površine nula; (g) Pločica koja je neograničena u smislu da se ne može zatvoriti konačno velikim krugom. U ovom primeru pločica je uzeta kao deo beskonačne trake.

## 1.2 Osnovni elementi u popločavanju

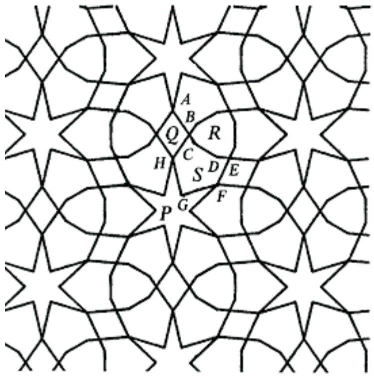
Iz definicije pokrivanja vidimo da presek bilo kog konačnog skupa pločica iz $\mathcal{T}$ (koji sadrži bar dve različite pločice) mora imati površinu nulu. Za većinu posmatranih popločavanja, takav presek biće prazan ili sastavljen od skupa *izolovanih tačaka i lukova.* Tačke zvaćemo *čvorovima* popločavanja, a lukove *ivicama*, slika 2.

Prosta zatvorena kriva koja formira granicu pločice podeljena na izvesni broj delova čvorovima pokrivanja tako da svaki luk bude ivica pokrivanja, naziva se *ivica pločice.* Ivice pokrivanja se podudaraju sa ivicama dveju pločica koje leže po jedna sa svake strane. Osim kada nije drugačije navedeno, zanimaće nas samo slučaj gde svaka pločica ima konačan broj čvorova. Ivica povezuje dva čvora (ti čvorovi su krajnje tačke) i svaki čvor je krajnja tačka izvesnog broja ivica. Taj broj se naziva *valenca* čvora, i ona je najmanje 3, slika 3. Ako je svaki čvor pokrivanja $\mathcal{T}$ iste valence $j$, tada kažemo da je $\mathcal{T}$ *$j$-valentno* pokrivanje. Pokrivanje na slici 2 je četvorovalentno. Čvorovi, ivice i pločice pokrivanja nazivaju se elementi.

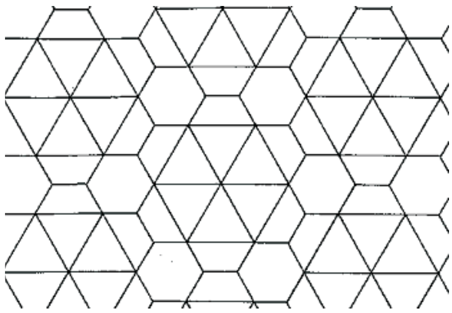
Nadalje posmatramo slučajeve pokrivanja kod kojih je svaka pločica mnogougao.

U uobičajenoj terminologiji mnogougao (poligon) ima čvorove i ivice, ali može doći do zabune ako koristimo te iste reči za elemente popločavanja kojem mnogouglovi pripadaju. Zato cémo koristiti nazive temena i stranice mnogouglova. Mnogougao sa $k$ temena (dakle i $k$ stranica) zvaćemo $k$-tougao ($k$-gon). Naravno, temena i stranice se mogu podudarati sa čvorovima i ivicama pokrivanja. Tada je pokrivanje mnogouglovima ivica-na-ivicu (edge-to-edge), ali to ne mora biti slučaj. Jasno je da je pokrivanje sa slike 3 ivica-na-ivicu, ali ono sa slike 2 nije.

Dve pločice su susedne ako imaju zajedničku ivicu. Dve pločice se graniče ako imaju neprazan presek, slika 4. $T$ ima zajedničke ivice sa $T_2$, $T_3$, $T_4$, $T_5$, $T_7$ pa su zato susedne. Pored ovih pločica $T_1$ i $T_6$ su granične za $T$. Slično kažemo da su dve različite ivice susedne



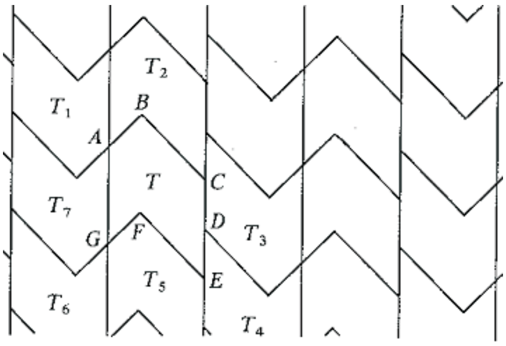

Sl. 2: Pločice su poligoni: 12-ugao (ili zvezdasti šestougao) $P$, paralelogram $Q$, konveksni 9-ugao $R$ i nekonveksni 7-ugao $S$. Duži $BC$, $CD$ i $DE$ su stranice pločice $R$ (takođe i pločice $S$). Njihova unija, poligonalni luk $BCDE$ je jedna ivica pokrivanja, takođe i pločica $R$ i $S$. Slično, $FGH$ je jedna ivica pokrivanja i pločica $P$ i $S$, dok su $FG$ i $GH$ stranice ove dve pločice. Duž $ABC$ je isto tako strana pločice a ne jedna ivica pokrivanja. Tačke $A$, $B$, $E$, $F$ i $H$ su čvorovi pokrivanja, ali $C$, $D$ i $G$ nisu. Tačke $B$, $C$, $D$ i $E$ su četiri od devet temena pločice $R$. Tačka $G$ je teme pločice $S$ a takođe i pločice $P$ ali nije čvor pokrivanja. Zato je svaki čvor jedna tačka od četiri ivice pokrivanja. Pokrivanje je 4-valentno.



Sl. 3: Svaki čvor je ili 3-valentni, ili 5-valentni ili 6-valentni. Svaka pločica je trougao, četvorougao ili šestougao.

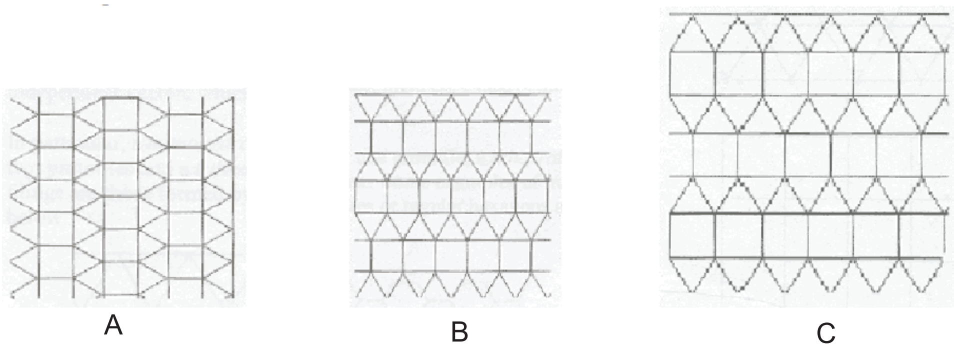
ako imaju zajedničku krajnju tačku.

Dva pokrivanja $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ su *kongruentna (podudarna)* ako se $\mathcal{T}_1$ nekom izometrijskom transformacijom može dovesti do poklapanja sa $\mathcal{T}_2$. Češće će nas zanimati *ekvivalentna pokrivanja.* Dva pokrivanja su *ekvivalentna* ili *slična* ako se jedno od njih može skalirati (uvećavati ili umanjivati) ravnomerno po celoj ravni tako da bude kongruentno sa drugim. Ovaj koncept možemo definisati govoreći da su dva pokrivanja ekvivalentna ako postoji transformacija sličnosti ravni koja slika jedno od pokrivanja na drugo. Na primer, posmatrajmo sliku 5, na kojoj se može




Sl. 4: Ova slika ilustruje razlike između čvorova (pokrivanja) i temena (pločica), ivica (pokrivanja) i stranica (pločica), susednih i dodirnih (graničnih) pločica u slučaju pokrivanja mnogouglovima. Tačke *A, B, C, E, F* i *G* su temena pločice *T*, ali *A, C, D, E* i *G* su čvorovi pokrivanja. Duži pokrivanja *AB, BC, CE, EF, FG* i *GA* su stranice pločice *T*, a *AC, CD, DE, EG* i *GA* su ivice pokrivanja. Pločice $T_2$, $T_3$, $T_4$ i $T_5$ su dodirne (a i susedne) sa pločicom *T*, a pločice $T_1$ i $T_6$ su susedne a nisu dodirne (granične) sa pločicom *T*.

videti da je A kongruentno sa B, a B je slično sa C.

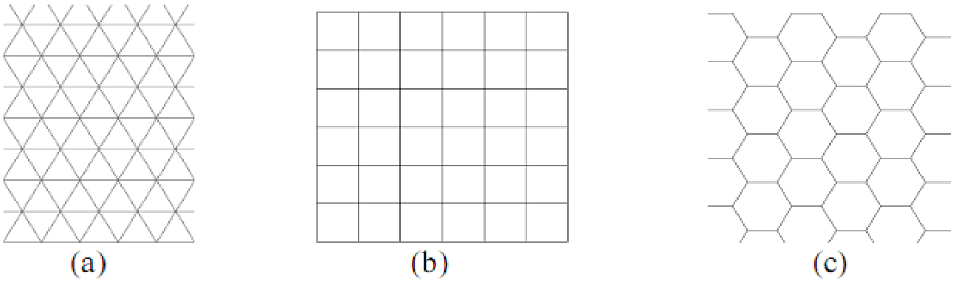



Sl. 5: A je kongruentno sa B, a B je slično sa C.

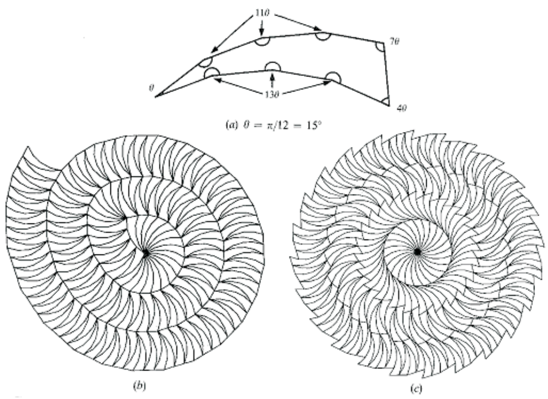
## 1.3 Popločavanje pločicama različitih oblika

Većina posmatranih pločica su topološki diskovi, i za dalje pojednostavljenje uglavnom razmatraćemo monohedralana pokrivanja.

Reč *monohedral* znači da je svaka pločica pokrivanja $\mathcal{T}$ kongruentna (direktno ili refleksivno) jednom fiksnom skupu $T$ ili, jednostavnije, da su sve pločice iste veličine i oblika. Skup $T$ naziva se *protopločica* od $\mathcal{T}$, odnosno protopoločica $T$ određuje pokrivanje $\mathcal{T}$. Primeri monohedralnog




Sl. 6: Primeri monohedralnih pokrivanja.



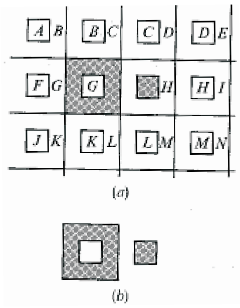

Sl. 7: Monohedralna pokrivanja u obliku spirala.

pokrivanja jednakostraničnim trouglovima, kvadratima i pravilnim šestouglovima prikazani su na slici 6 (a), (b) i (c).

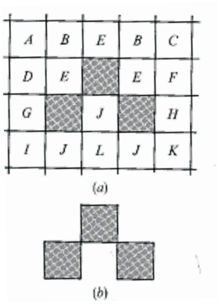
Neka od najneobičnijih monohedralnih pokrivanja su ona u obliku spirala sa jednom ili više grana, slika 7.

Pre nego što zaključimo ovu uvodnu diskusiju o monohedralnim pokrivanjima, daćemo nekoliko primera slučajeva kada pločice nisu topološki diskovi. Slika 8 pokazuje primer protopločice koja nije ni povezana ni prosto povezana. Na slici 9 pokazaćemo primer protopločice koja je povezana ali nije topološki disk, a na slici 10 monohedralno pokrivanje sa neograničenim pločicama. Na slikama 8 i 9 bilo je zbog razumljivosti dijagrama neophodno označiti različite delove iste pločice odgovarajućom oznakom ili senčenjem. Ovde nas zanimaju samo oblici različitih pločica; to nisu *označene pločice* ili *obojene pločice*. U slučaju pločice koja nije povezana u odgovarajućem monohedralnom pokrivanju različiti delovi moraju biti međusobno u fiksnoj relaciji.

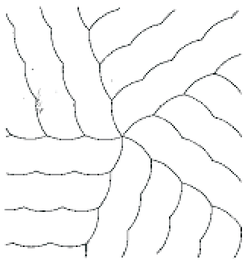
Uopštićemo uvodnu terminologiju. Pod *dihedralnim* pokrivanjem $\mathcal{T}$ podrazumevaćemo ono pokrivanje kod kojeg je svaka pločica $T_i$ kongruentna jednoj od dve različite protopločice $T$



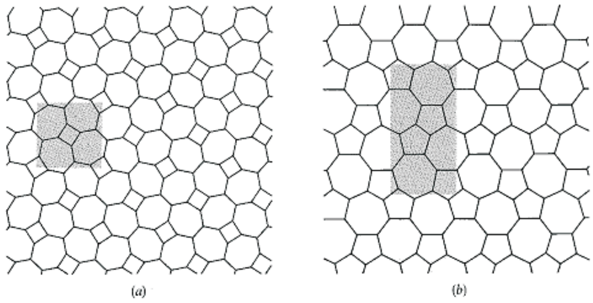

Sl. 8: Monohedralno pokrivanje (a) sa protopločicom (b) koja nije ni povezana ni prosto povezana.



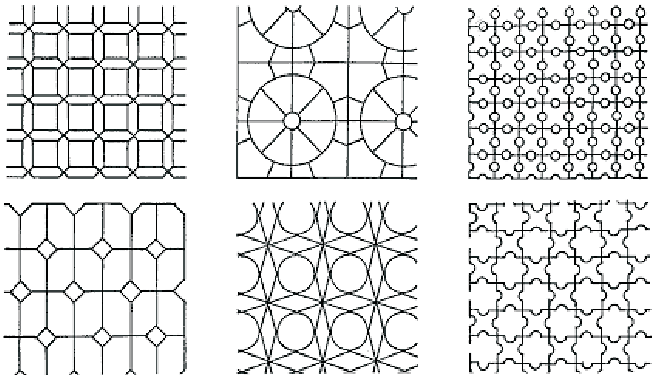

Sl. 9: Monohedralno pokrivanje (a) sa protopločicom (b) koja je povezan skup ali nije topološki disk jer ima „odsečene delove".



Sl. 10: Monohedralno pokrivanje sa neograničenom protopločicom.



Sl. 11: Dva dihedralna pokrivanja čije su protopločice konveksni poligoni.



Sl. 12: Dihedralna pokrivanja za $n = 2, 3, 4$.

ili $T'$. Na sličan način definišemo *trihedralno, 4-hedralno,..., n-hedralno pokrivanje* kod kojeg postoji $3, 4, ..., n$ različitih protopločica. Pokrivanje $\mathcal{T}$ je $n$-hedralno ako postoji skup $\mathcal{S} = \{T_1, T_2, ..., T_n\}$ pločica takvih da je:

(1) svaka pločica $T_i$ za $i = 1, ..., n$ je podudarna tačno jednoj pločici iz pokrivanja $\mathcal{T}$;

(2) svaka pločica iz pokrivanja $\mathcal{T}$ je podudarna najmanje jednoj pločici iz skupa $\mathcal{S}$.

Tada za skup $\mathcal{S}$ kažemo da generiše pokrivanje $\mathcal{T}$. Dva dihedralna pokrivanja iz kristalografije data su na slici 11, drugi primer za $n = 2, 3, 4$ nalazi se na slici 12.

## 1.4 Izometrijske transformacije

Mnoge važne osobine popločavanja ravni zavise od simetrije. Objasnićemo značenje ovog pojma i dati primere pokrivanja sa različitim vrstama simetrija.

**Definicija 1.1.** Izometrijska transformacja $J$ Euklidske ravni $E^2$ je obostrano jednoznačna i neprekidna transformacija $E^2 \longrightarrow E^2$ koja svake dve tačke $A$, $B$ prostora $E^2$ preslikava u odgovarajuće dve tačke $A'$, $B'$ tog prostora tako da su duži $AB$ i $A'B'$ jednake (podudarne)

$$AB = A'B' \quad (AB \cong A'B') \quad (A' = J(A), \quad B' = J(B)).$$

Drugim rečima, izometrijska transformacija $J$ je geometrijsko preslikavanje prostora $E^2$ na sebe koje svaku duž $AB \subset E^2$ preslikava u jednaku (podudranu) duž $A'B' \subset E^2$

**Definicija 1.2.** Izometrijska transformacija kojom se svaka tačka prostora $E^2$ preslikava u sebe je *identična izometrijska transformacija (koincidencija)* i označava sa $J_0$, $J_0(P) = P$, slika 14(a).

**Teorema 1.3.** *Inverzna transformacja izometrijske transformacije $J$ Euklidske ravni $E^2$ predstavlja takođe izometrjsku transformacju $J^{-1}$ te ravni.*

$$\textit{Ako} \quad J : M \longrightarrow M', \quad \textit{onda} \quad \textit{je} \quad J^{-1} : M' \longrightarrow M.$$

**Teorema 1.4.** *Proizvod dveju izometrijskh transformacja $J_1$ i $J_2$ je takođe izometrijska transformacija.*

Za svake dve transformacije $J_1$ i $J_2$ definišemo proizvod $J_1 \cdot J_2(P) \equiv J_1J_2(P) = J_2(J_1(P))$. Kao simbol za proizvod $J \cdots J$, gde se $J$ javlja $n$ puta, tj. $n - ti$ proizvod transformacije $J$ koristimo $J^n$. Red transformacije $J$ je minimalan broj $n(n \in N)$ takav da je $J^n = J_0$. Ako ne postoji konačan broj $n$ koji zadovoljava zadatu relaciju, tada je transformacja $J$ beskonačnog reda. Ako je $n = 2$, tada se transformacija $J$ zove involucija. Ako su transformacije $J_1$ i $J_2$ takve da je $J_1J_2 = J_0$ tada je $J_1$ inverzno za $J_2$, a važi i obrnuto; i ovo označavamo sa $J_1 = J_2^{-1}$ ili $J_2 = J_1^{-1}$. Za svaku involuciju $S$ imamo $S = S^{-1}$ i za proizvod dve transformacije važi $(J_1J_2)^{-1} = J_2^{-1}J_1^{-1}$.

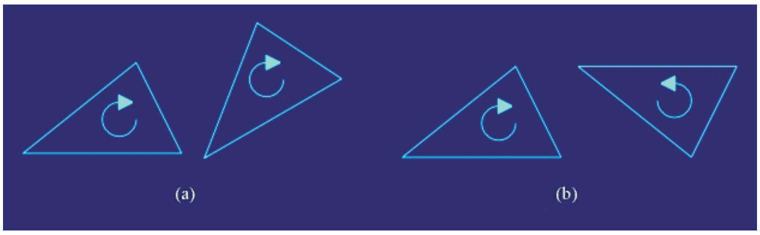
**Teorema 1.5.** *Skup $S(J)$ svih izometrijskih transformacja Euklidske ravni $E^2$ sa operacijom proizvod predstavlja grupu izometrijskih transformacija.*

**Definicija 1.6.** Izometrijska transformacija $J$ ravni $E^2$ je direktna ako ne menja orijentaciju ravni. U suprotnom ona je indirektna.

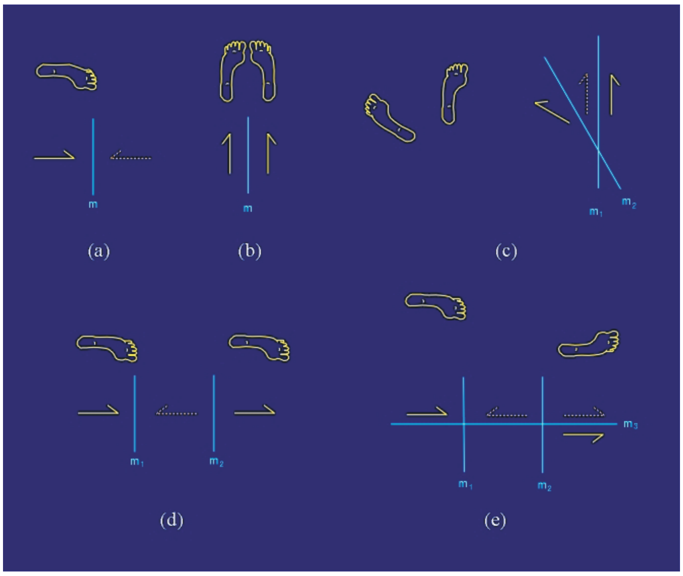
**Definicija 1.7.** Osnom refleksijom ravni $E^2$ u odnosu na pravu $p$ se naziva izometrijska transformacija $S_p$ koja nije koincidencija i u kojoj je svaka tačka prave $p$ invarijantna. Prava $p$ je osa refleksije $S_p$.

**Teorema 1.8.** *Svaka izometrijska transformacija ravni $E^2$ se može predstaviti u obliku kompozicije najviše tri osne refleksije.*

Svaka izometrija je jedna od četiri tipova: *rotacija*, *translacija*, *refleksija* i *klizajuća refleksija*:




Sl. 13: (a) direktna, (b) indirektna izometrijska transformacija ravni.




Sl. 14: (a) identička transformacija, (b) refleksija, (c) rotacija, (d) translacija, (e) klizajuća refleksija.

**1. Rotacija**

**Definicija 1.9.** Kompozicija dveju osnih refleksija ravni $E^2$ čije se ose seku u nekoj tački $O$ se naziva *centralna rotacija ravni* $E^2$ *oko tačke* $O$.

**Definicija 1.10.** Kaže se da je u ravni $E^2$ lik $\Lambda$ obrtno ili rotaciono podudaran sa likom $\Lambda'$ u odnosu na tačku $O$ ako postoji centralna rotacija $\mathcal{R}_{O,\omega}$ ravni $E^2$ tako da je $\mathcal{R}_{O,\omega}(\Lambda) = \Lambda'$, slika 14(c).

**Definicija 1.11.** Kaže sa da u ravni $E^2$ lik $\Lambda$ raspolaže *centralnom simetrijom reda* $n$ ako postoji centralna rotacija $\mathcal{R}_{O,\frac{2\pi}{n}}$ u ravni $E^2$ tako da je $\mathcal{R}_{O,\frac{2\pi}{n}}(\Lambda) = \Lambda$ gde je $O$ tačka ravni $E^2$, a $n$ prirodan broj ili racionalan broj oblika $\frac{p}{q}$ pri čemu su $p$ i $q$ uzajamno prosti. Tačka $O$ se naziva središtem centralne simetrije $\mathcal{R}_{O,\frac{2\pi}{n}}$.

**Definicija 1.12.** Za poligon $A_1A_2...A_p$ u ravni $E^2$ se kaže da je pravilan ako raspolaže centralnom simetrijom reda $p$.
*Napomena:* U sledećoj sekciji posmatraćemo grupe simetrija pravilnih poligona.

**2. Translacija**

**Definicija 1.13.** Neka su $S_p$ i $S_q$ osne refleksije ravni $E^2$ čije su ose $p$ i $q$ upravne na neku pravu $s$ u tačkama $P$ i $Q$ redom i neka je $P' = S_q(P)$. Translacijom ravni $E^2$ po pravoj $s$ za duž $PP'$ se naziva kompozicija $S_qS_p$. Označava se sa $\tau_{\overrightarrow{PP'}}$.

Za lik $\Lambda'$ kažemo da je nastao translacijom lika $\Lambda$, ako su sve tačke lika $\Lambda'$ dobivene translacijom svih tačaka lika $\Lambda$.

Primer translacije prikazan je na slici 14(d). Ona može da bude bilo kog pravca.

**3. Refleksija**

Refleksija je preslikavanje svih tačaka figure sa jedne strane prave $L$ na drugu stranu, tako da je normalno rastojanje izmedju bilo koje tačke $P$, sa jedne strane prave $L$, do prave jednako normalnom rastojanju tačke $P'$ (koja je slika od $P$) do prave $L$; prava $L$ je osa refleksije, slika 14(b).

**4. Klizajuća refleksija**

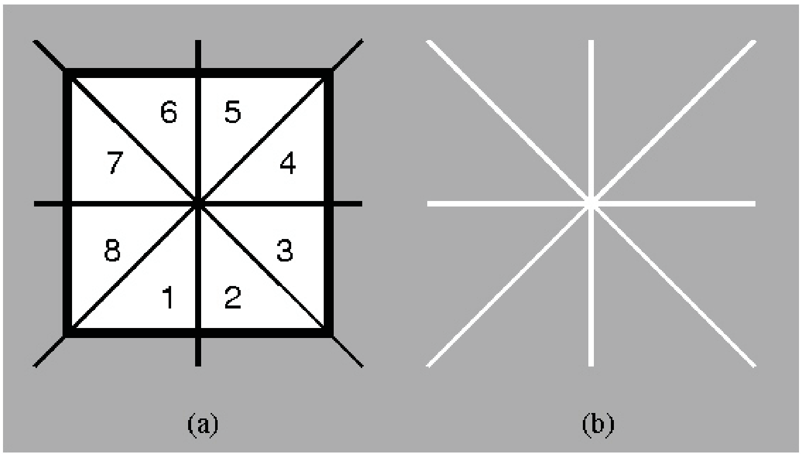
Klizajuća refleksija je proizvod dveju izometrijskih transformacija refleksije i translacije; primer na slici 14(e).

**Teorema 1.14.** *Kompozicija dveju centralnih rotacija ravni* $E^2$ *predstavlja centralnu rotaciju, translaciju ili koincidenciju.*

**Teorema 1.15.** *(Bernuli-Šal[1]): Svaka direktna izometrijska transformacija* $J$ *ravni* $E^2$ *predstavlja koincidenciju, translaciju ili centralnu rotaciju.*

**Teorema 1.16.** *(Bernuli-Šal): Svaka indirektna izometrijska transformacija* $J$ *ravni* $E^2$ *predstavlja osnu ili klizajuću refleksiju.*

[1]Michel Floréal Chasles (1793-1880), francuski matematičar

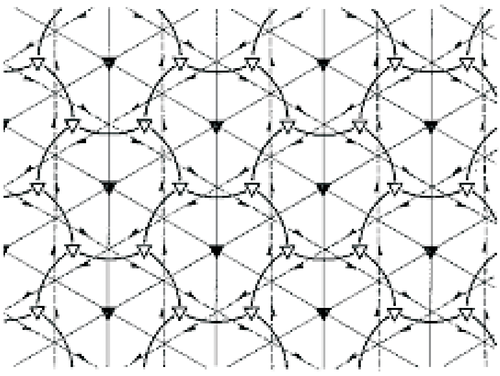



Sl. 15: Grupe simetrija kvadrata: identička transformacija $E(1 \leftrightarrow 1, 2 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 3, 4 \leftrightarrow 4, 5 \leftrightarrow 5, 6 \leftrightarrow 6, 7 \leftrightarrow 7, 8 \leftrightarrow 8)$; refleksije $R(1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 8, 4 \leftrightarrow 7, 5 \leftrightarrow 6)$, $R_1(1 \leftrightarrow 4, 2 \leftrightarrow 3, 3 \leftrightarrow 3, 5 \leftrightarrow 8, 6 \leftrightarrow 7)$, $R_1RR_1(1 \leftrightarrow 6, 2 \leftrightarrow 5, 3 \leftrightarrow 4, 7 \leftrightarrow 8)$; rotacije $RR_1(1 \to 7, 2 \to 8, 3 \to 1, 4 \to 2, 5 \to 3, 6 \to 4, 7 \to 5, 8 \to 6)$, $R_1R(1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 5, 4 \to 6, 5 \to 7, 6 \to 8, 7 \to 1, 8 \to 2)$ i polu-rotacije $(RR_1)^2(1 \leftrightarrow 5, 2 \leftrightarrow 6, 3 \leftrightarrow 7, 4 \leftrightarrow 8)$ i (b) ravan pokrivanja sa $D_4$.

## 1.5 Grupe simetrija pločica i ravni popločavanja

Za pločicu $T$ se kaže da je invarijantna u grupi transformacija $J$ ako je invarijantna u odnosu na sve njene transformacije, odnosno ako je $J_1(T) = T$ za svaku transformaciju $J_1 \in J$. Sve simetrije jedne pločice $T$ formiraju grupu, koju zovemo grupa simetrija od $T$ i označavamo $S(T)$. Na primer, sve simetrije kvadrata, (slika 15) čine nekomutativnu grupu koja se sastoji od identičke transformacije $J_0$, refleksija $R$, $R_1$, $R_1RR_1$ i $RR_1R$ i rotacija $RR_1$, $(RR_1)^2$ i $R_1R$ koje su simetrije grupe kvadrata $D_4$. Refleksije su reda 2, rotacije $RR_1$ i $R_1R$ su reda 4 a polu-rotacija $(RR_1)^2$ je reda 2.

Zgodno je uvesti izvesno označavanje za grupe koje se često javljaju. Koristićemo $C_1$ ili $J_0$ za grupu sastavljenu od samo jedne izometrije, *identičke (jedinične) izometrije*, a $C_n$, $n \geq 2$, za grupu koju čine *rotacije* za ugao $\frac{2\pi j}{n}$ za $(j = 1, ..., n-1)$ oko fiksne tačke. To je *ciklična grupa reda n*. Koristimo i $D_n$, $n \geq 1$, za grupu sastavljenu od svih izometrija iz $C_n$ zajedno sa refleksijama u odnosu na $n$ pravih koje se međusobno seku pod istim uglom. To je *dihedralna (diedarska) grupa reda* $2n$; za $n \geq 3$ to je grupa simetrija pravilnog $n$-tougla, slika 16. Kada je $n = 1$, grupa $D_1$ (reda 2) sadrži samo identičku transformaciju i refleksiju u odnosu na pravu; kada je $n = 2$ grupa $D_2$ (reda 4) sadrži identičku transformaciju, refleksiju u odnosu na dve normalne prave i rotaciju za ugao $\pi$ oko tačke u kojoj se dve prave refleksije seku. *Grupa rotacija* $d_\infty$ sastoji se od svih rotacija oko date tačke i svih refleksija u odnosu na prave kroz tu tačku, čine kružni disk. Primećujemo da svaka grupa $C_n$ i $D_n$ ima osobinu da čuva fiksiranu bar jednu tačku ravni; to su jedine grupe koje se mogu javiti kao grupe simetrija $S(T)$ kompaktnog



Sl. 16: Monohedralno pokrivanje sa navedenim simetrijama.

skupa (zatvoren i ograničen) $T$.

Proširićemo prirodno definicije simetrije na strukture složenije od jednog skupa. Tako u slučaju pokrivanja $\mathcal{T}$ za izometriju $J$ kažemo da je simetrija od $\mathcal{T}$ ako ona slika svaku pločicu iz $\mathcal{T}$ na pločicu u $\mathcal{T}$. Na primer, slika 16 prikazuje monohedralno pokrivanje koje ima simetrije sva četiri tipa. Trouglovi (puni i prazni) označavaju centar trostruke rotacione simetrije za $\frac{2\pi}{3}$ ili $\frac{4\pi}{3}$. Pune linije su linije refleksije, isprekidane linije označavaju klizajuću refleksiju, polu-strelice translaciju.

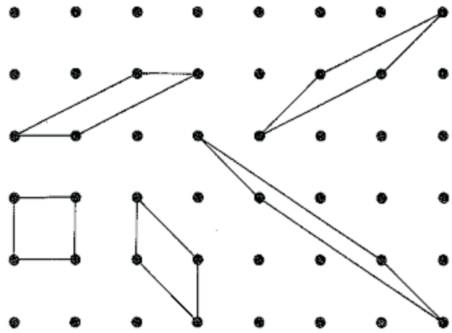
Ideja simetrije može se proširiti i na opštije situacije; posmatrajmo, na primer, obeleženo pokrivanje, tj. ono pokrivanje kod kojeg postoji šara ili motiv na svakoj pločici. Tada simetrija obeleženog pokrivanja ne samo što slika pločice iz $\mathcal{T}$ u $\mathcal{T}$, već takodje slika svaku šaru sa pločice iz $\mathcal{T}$ na šaru slike pločice. U neformalnoj interpretaciji, ne samo da preslikavamo pločice već i njihove šare.

Za proizvoljno pokrivanje $\mathcal{T}$, uopštićemo gore uvedenu notaciju i pisaćemo $S(\mathcal{T})$ za grupu simetrija od $\mathcal{T}$. Moguće je, naravno, da se $S(\mathcal{T})$ sastoji samo od identičke transformacije. Tada ćemo ga označavati sa $C_1$ ili $J_0$ ili može imati mnogo simetrija, na primer, slika 16. Jasno je da se ove činjenice mogu upotrebiti kao osnova za klasifikaciju pokrivanja.

1. *Periodično pokrivanje*

Na osnovu izometrijskih transformacija i grupe simetrija uvešćemo pojmove: *periodično pokrivanje, tranzitivne klase, pravilno pokrivanje.*

Ako pokrivanje ima još neku simetriju pored identičke, onda se naziva *simetrično.* Ako njegova grupa simetrije sadrži bar dve translacije u neparalelnim smerovima, takvo pokrivanje nayivamo *periodičnim.* Mnoga pokrivanja koja ćemo sresti su periodična i pokazaćemo kako ih je lako opisati. Predstavimo te dve neparalelne translacije vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Tada $S(\mathcal{T})$ sadrži sve translacije tipa $n\vec{a} + m\vec{b}$ gde su $n$ i $m$ celi brojevi. Sve te translacije dobićemo kombinovanjem $n$ translacija vektora $\vec{a}$ i $m$ translacija vektora $\vec{b}$, na gore opisan način. Počevši



Sl. 17: Mreža $\Lambda$ svih tačaka ravni i neki paralelogrami čija su temena tačke mreže $\Lambda$. Svaki ovaj paralelogram je protopločica paralelogramnog pokrivanja kod kojeg su čvorovi podudarni sa mrežom $\Lambda$.

od proizvoljne fiksne tačke $O$ primenom skupa translacija $n\vec{a} + m\vec{b}$, formira se mreža. Najbliži primer mreže je skup tačaka Euklidske ravni sa celobrojnim koordinatama. To je tzv. *mreža jediničnog kvadrata.* Slika 17 predstavlja skup čvorova pravilnog pokrivanja kvadratima (pravilna pokrivanja objasnićemo u sledećem poglavlju). Opštije, za mrežu možemo smatrati čvorove pokrivanja paralelogramima. Na primer, primeri mreže su crni trouglići (posmatrani kao tačke) na slici 16 ili tačke označene na slici 18.

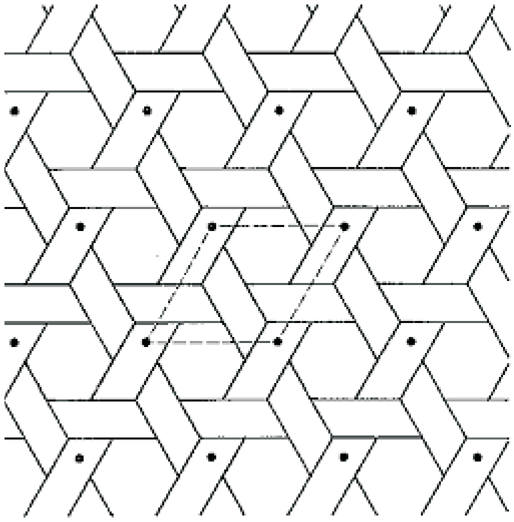
Dakle svakom periodičnom pokrivanju $\mathcal{P}$ pridružena je mreža, i tačke te mreže mogu se smatrati (na mnogo načina) čvorovima paralelogramnog pokrivanja $\mathcal{T}$, slika 17. Pločice u $\mathcal{P}$ zovu se *osnovni paralelogrami* (period). Ako znamo konfiguraciju koju čine pločice, ivice i čvorovi od $\mathcal{T}$ koje sadrži jedan od paralelograma iz $\mathcal{P}$, ostatak $\mathcal{T}$ može se konstruisati ponavljanjem konfiguracije u svakom paralelogramu iz $\mathcal{P}$. Primer periodičnog pokrivanja je na slici 18. Ovde su obeleženi $\mathcal{P}$ i mreža.

Tri primera simetričnog pokrivanja koja nisu periodična data su na slici 19.

Neka je $T$ pločica proizvoljnog pokrivanja $\mathcal{T}$. Tada je svaka simetrija od $\mathcal{T}$ koja slika $T$ na sebe je simetrija od $T$. Obrat u opštem slučaju ne važi, slika 19(c). Jedina simetrija iz $\mathcal{T}$ koja slika pločicu na sebe je identička transformacija, iako sama pločica pošto je kvadrat ima još 7 simetrija. Zato moramo pažljivo razlikovati grupu simetrija pločice $T$, $S(\mathcal{T})$ i $S(\mathcal{T} \mid T)$ grupu simetrija od $T$ koje su takođe simetrije pokrivanja $\mathcal{T}$. Skraćeno ćemo $S(\mathcal{T} \mid T)$ zvati *indukovana grupa pločice ili stabilizator od* $T$ *u* $\mathcal{T}$. Slika 20 pokazuje zanimljiv primer kod kojeg se $S(\mathcal{T} \mid T)$ i $S(T)$ razlikuju.

2. *Tranzitivna klasa*

Pločice $T_1$ i $T_2$ pokrivanja $\mathcal{T}$ su ekvivalentne ako grupa simetrija sadrži transformaciju koja $T_1$ slika na $T_2$. Kolekcija svih pločica iz $\mathcal{T}$ koje su ekvivalentne sa $T_1$ naziva se *tranzitivna klasa* od $T_1$. Ako sve pločice iz $\mathcal{T}$ čine tranzitivnu klasu, kažemo da je pokrivanje $\mathcal{T}$ *"tile-transitive"* ili *izohedralno*. Na slici 20 je izohedralno pokrivanje. Takođe primeri izohedralnog pokrivanja



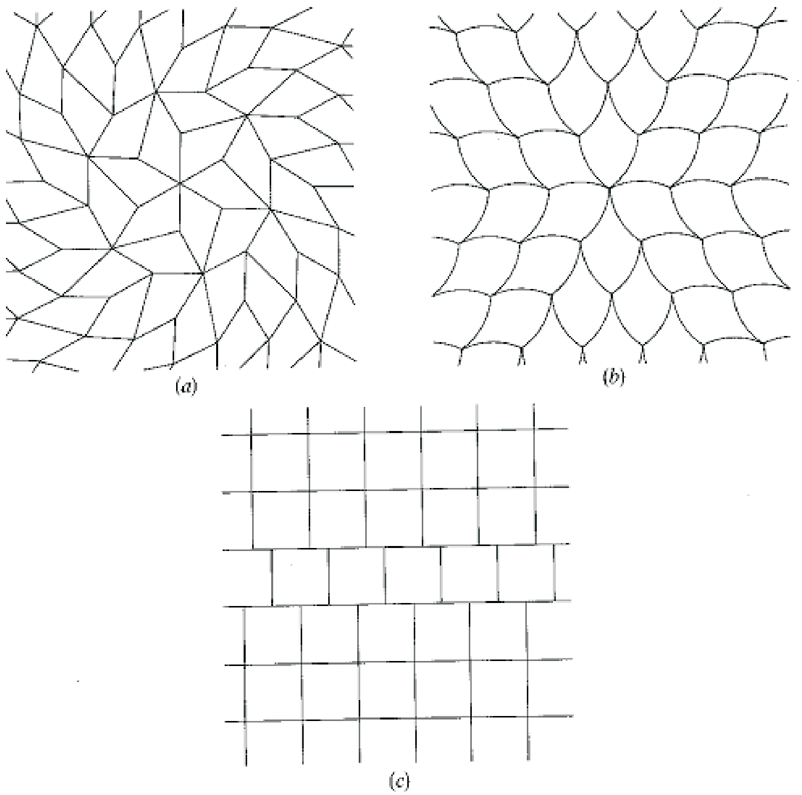
Sl. 18: Periodično dihedralno pokrivanje sa odgovarajućom mrežom i jedan mogući periodni paralelogram.

mogu se videti na slici 16 kao i na slici 17. Pravilno pokrivanje je na slici 6. Pokrivanja sa slika 19 i 21 su monohedralna ali nisu izohedralna. Razlika izmedju monohedralnog i izohedralnog pokrivanja može da izgleda neznatna ali je veoma važna. Ovo ilustrujemo činjenicom da je problem nalaženja i klasifikacije svih monohedralnih pokrivanja nerešen (čak i kada su sve pločice konveksni poligoni). Iz izohedralnog pokrivanja sledi monohedralno pokrivanje, dok obrat ne važi. Ako je $\mathcal{T}$ pokrivanje sa $k$-tranzitivnih klasa, naziva se *$k$-izohedralno.* Slika 21 prikazuje tri monohedralna pokrivanja, slika 22 2-izohedralna dihedralna pokrivanja. Ako su pločice od $n$ različitih oblika biće $n$-tranzitivnih klasa.

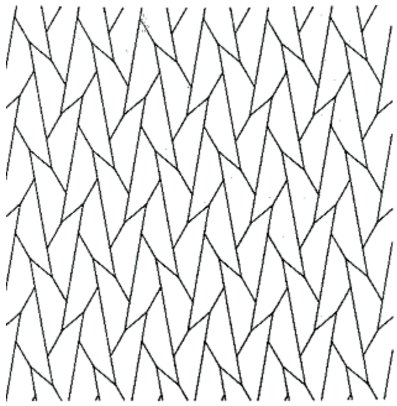
Ideja tranzitivnosti i ekvivalencije takodje je primenljiva i na druge elemente pokrivanja. Ako grupa simetrija $S(\mathcal{T})$ od $\mathcal{T}$ sadrži operacije koje slikaju svaki čvor od $T$ na neki drugi čvor, kažemo da čvorovi obrazuju jednu klasu tranzitivnosti ili da je pokrivanje izogonalno. Tri pravilna pokrivanja i pokrivanja sa slika 16 i 22 su *izogonalna.* Ovde se nećemo baviti potpunim opisom izogonalnih pokrivanja. Pokrivanje se naziva $k$-izogonalno ako njegovi čvorovi formiraju $k$-klasa tranzitivnosti, $k \geq 1$. Pokrivanja sa slika 20 i 21 (a) su 2-izogonalna.

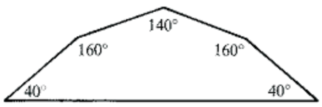
Monogonalno pokrivanje je ono kod kojeg svaki čvor zajedno sa njemu incidentnim (susednim) ivicama, formira figure kongruentne sa ma kojim drugim čvorovima i njihovim incidentnim (susednim) ivicama. Razlika izmedju izogonalnog i monogonalnog pokrivanja analogna je razlici izmedju izohedralnog i monohedralnog. Primer pokrivanja koje je monogonalno ali nije izogonalno dat je na slici 23.

Izotoksalna pokrivanja su ona pokrivanja kod kojih se svaka ivica može preslikati na proizvoljnu ivicu simetrijom pokrivanja. Pokrivanja sa slika 16 i 22 su izotoksalna dok ona sa slike 18 nije.

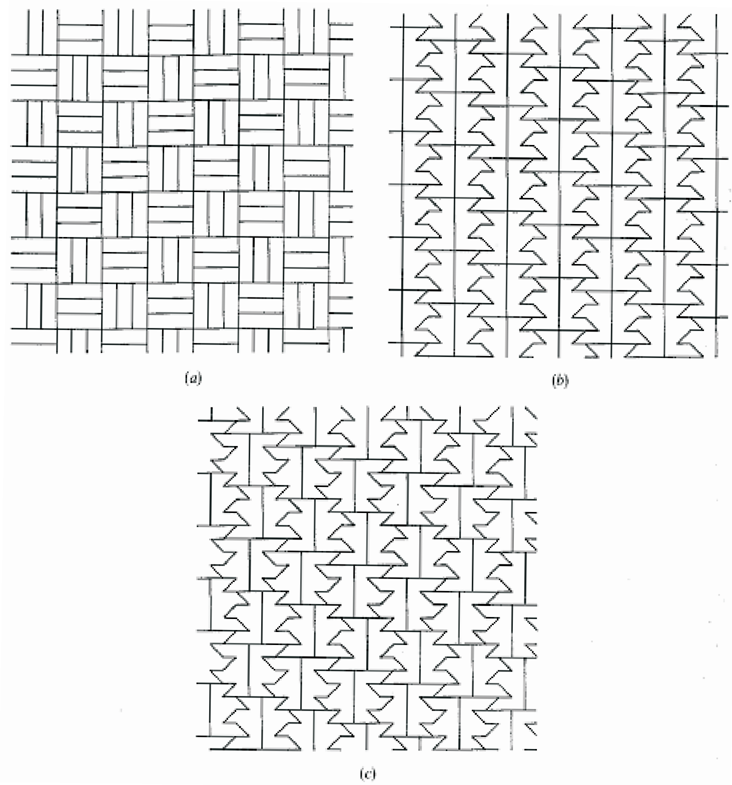



Sl. 19: Monohedralna pokrivanja sa datim grupama simetrija koja nisu periodična: (a) grupa simetrija $C_6$, (b) grupa simetrija $D_3$ i (c) grupa simetrije se sastoji jedino od translacije paralelne datom pravcu.

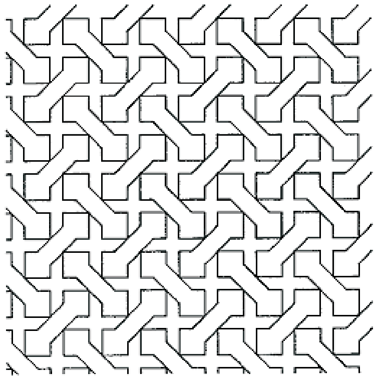


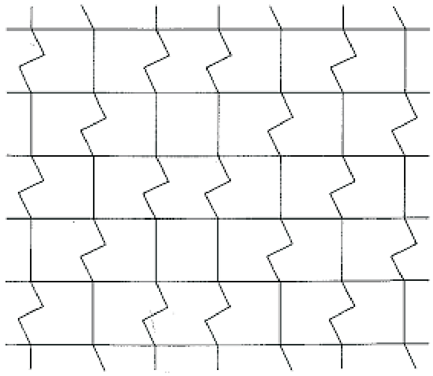

Sl. 20: Izohedralno pokrivanje (a) sa protopločicom (b) koje ima simetriju grupe reda 2 dok se indukovana grupa simetrija sastoji samo od identičke simetrije.




Sl. 21: Tri monohedralna pokrivanja.



Sl. 22: 2-izohedralna dihedralna pokrivanja.



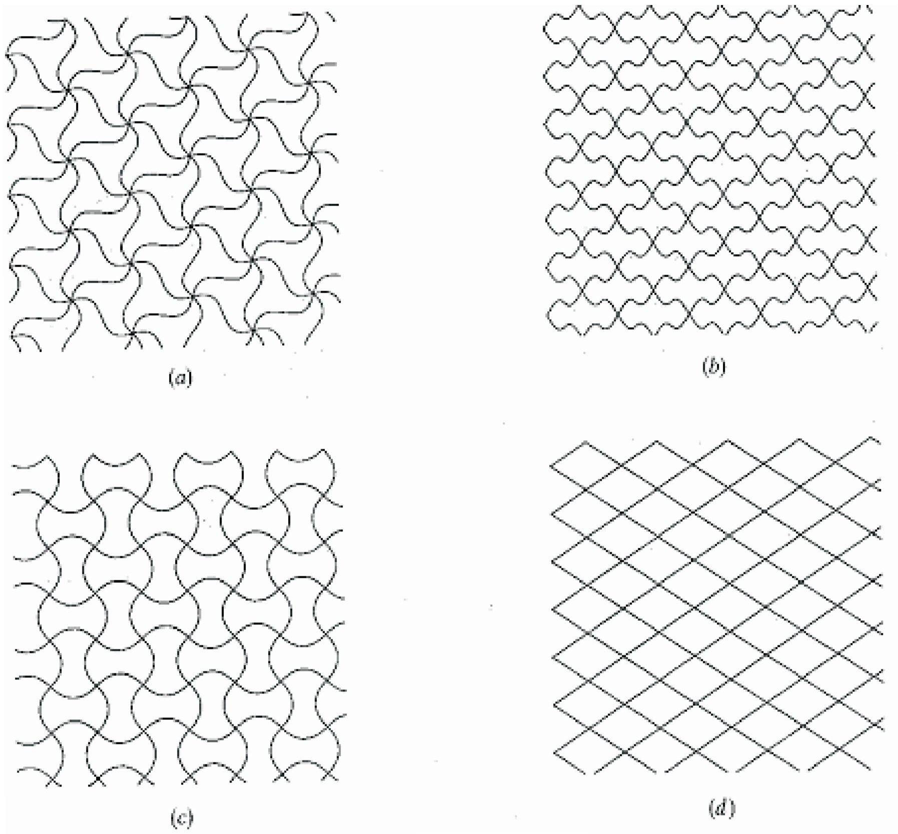
Sl. 23: Monogonalno pokrivanje koje nije izogonalno.

3. *Pravilna pokrivanja*

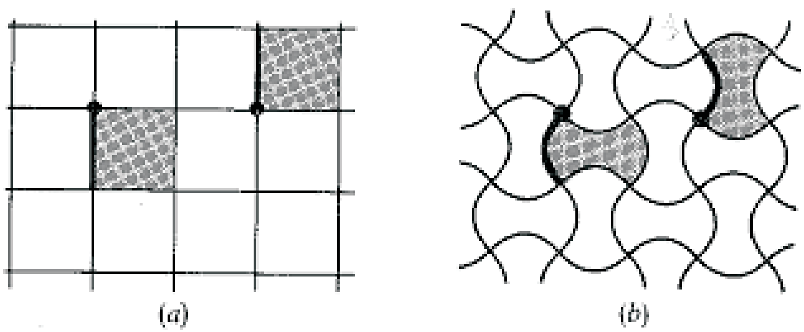
Slika 24 prikazuje nekoliko primera pokrivanja koja su izohedralna, izogonalna i izotoksalna. Ona jasno prikazuje izvesnu količinu *pravilnosti.* Posmatraćemo po čemu se ona razlikuju od pravilnih pokrivanja sa slike 6. Da bismo definisali pravilno pokrivanje opet koristimo koncept tranzitivnosti, ali u vrlo strogom smislu. Pod zastavicom ("flag") kod pokrivanja podrazumevamo uređenu trojku $(V, E, T)$ koju čine čvor $V$, ivica $E$ i pločica $T$ koji su uzajamno incidentni. Primeri zastavice prikazani su na slici 25 isticanjem čvora, ivice i senčenjem pločice. Vidimo da ako $T$ ima $n$ ivica i $n$ čvorova, tada pripada u tačno $2n$ zastavica. $E$ možemo izabrati tačno na $n$ različitih načina, a onda se čvor $V$ može odabrati da bude jedan od dveju krajnjih tačaka ivice $E$. Pokrivanje $\mathcal{T}$ je pravilno ako je njegova grupa simetrije $S(\mathcal{T})$ tranzitivna na zastavicama od $\mathcal{T}$. Opet sa slike 25 vidimo da su kod prvog pokrivanja (a) dve označene zastavice ekvivalentne pod $S(\mathcal{T})$. Lako se može proveriti da sve to važi za ostale zastavice. Međutim, kod drugog pokrivanja (b) ne postoji simetrija koja slika jednu označenu zastavicu na drugu. Može se pokazati da su pločice pravilnog pokrivanja pravilni mnogouglovi, ali kako ćemo videti dalje postoje mnogo pokrivanja pravilnim mnogouglovima koja nisu pravilna. U stvari, postoje tri pravilna pokrivanja, ona prikazana na slici 6.

# 2 Popločavanja pravilnim mnogouglovima

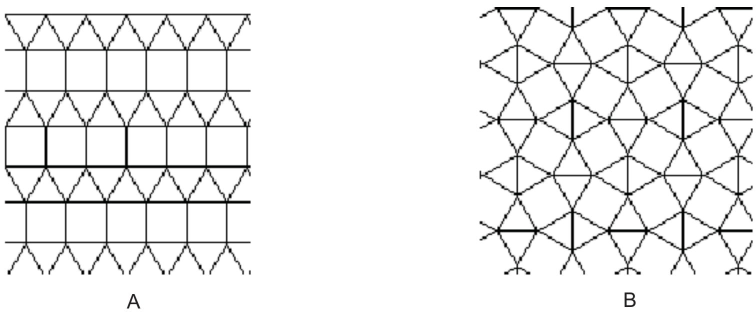
Popločavanja pravilnim mnogouglovima su bila jedan od prvih načina popločavanja kao predmet matematičkog istraživanja. Posmatraćemo pravilne mnogouglove sa $n$ stranica i $n$ temena, i označićemo ih sa $\{n\}$. U ovoj glavi razmatraćemo popločavanja koja su ivica-na-ivicu (kod kojih je svaka stranica svake pločice i ivica popločavanja i obrnuto; dakle svaka strana pločice takođe je i strana tačno jedne druge pločice) i popločavanja pravilnim mnogouglovima koja nisu ivica-na-ivicu.




Sl. 24: Primeri pokrivanja koja su izohedralna, izogonalna i izotoksalna.




Sl. 25: Pokrivanja koja su izohedralna, izotoksalna i izogonalna, u kojima su svake dve zastavice označene. Pokrivanje (a) je pravilno, sve zastavice su ekvivalentne, (b) nije pravilno, zastavice pripadaju dvema različitim klasama ekvivalencije.




Sl. 26: Dva pokrivanja kod kojih sve čvorove okružuju tri trougla i dva kvadrata.

## 2.1 Pravilna i uniformna popločavanja

Počnimo najpre sa terminima koji se odnose na čvorove popločavanja. Broj svake vrste pravilnih poligona koji okružuju čvor određuje *klasu (grupu)* čvora. Kažemo da su čvorovi popločavanja *iste klase* ako su svi oni okruženi istim brojem svake vrste pravilnih poligona. Slika 26 prikazuje dva pokrivanja kod kojih sve čvorove okružuju tri trougla i dva kvadrata.

Definisaćemo *tip čvora*. Čvor je tipa $n_1$, $n_2$,..., $n_r$ ako su kružno raspoređeni pravilni $n$-touglovi sa $n_1$, $n_2$,... i $n_r$ stranica, i označavamo ih $(n_1.n_2.\cdots.n_r)$. Kružni raspored može biti u smeru kretanja kazaljke na satu ili je suprotnog smera. Međutim, $n_1$ je poligon sa najmanjim brojem stranica od svih poligona poređanih u čvoru. Na slici 26(A) je pokrivanje kod kojeg su svi čvorovi tipa (3.3.3.4.4), dok je na slici 26(B) pokrivanje kod kojeg su svi čvorovi tipa (3.3.4.3.4). Dakle, čvorovi pokrivanja 26(A) su različitog tipa od onih u pokrivanju 26(B). Ako dva pokrivanja imaju čvorove iste klase, nije neophodno da su im i čvorovi istog tipa. Čvor tipa (3.3.3.4.4) obeležićemo $(3^3.4^2)$, isto tako i za tip (3.3.4.3.4) kraći zapis je $(3^2.4.3.4)$. Ovakvo označavanje koristimo i za sve čvorove drugih tipova.

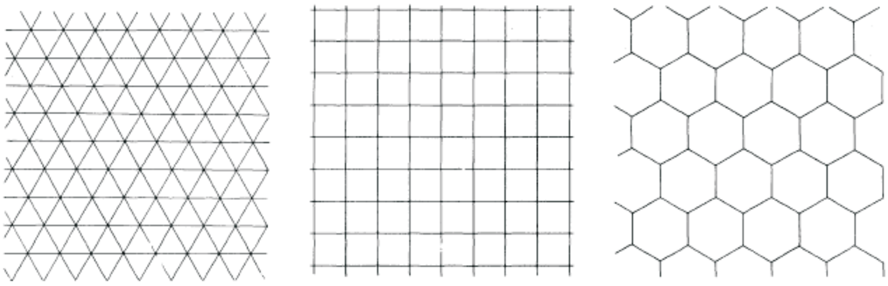
**Teorema 2.1.** *Jedina ivica-na-ivicu monohedralna popločavanja pravilnim mnogouglovima su* $(3^6)$, $(4^4)$ *i* $(6^3)$. *Ona imaju za protopločicu jednakostranični trougao, kvadrat odnosno pravilan šestougao.*

*Dokaz:* Veličina uglova u svakom čvoru iznosi $2\pi$, a unutrašnji ugao u svakom temenu pravilnog $n$-tougla je $\frac{(n-2)\pi}{n}$. Neka je popločavanje $\mathcal{T}$ $k$-valentno. U svakom čvoru se sastaje $k$ pravilnih $n$-touglova, pa dobijamo jednačinu

$$\frac{k(n-2)\pi}{n} = 2\pi$$

gde su $k, n \in N$, $n \geq 3$ (mnogougao sa najmanjim brojem stranica je trougao), odakle dobijamo da je

$$k = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}.$$



$(3^6)$ $(4^4)$ $(6^3)$

Sl. 27:

Rešenje tražimo u skupu prirodnih brojeva gde $n-2$ deli 4 tj. $n-2 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ i kako je $n \geq 3$, $n$ može imati vrednosti 3, 4 ili 6. Ovome odgovaraju monohedralna popločavanja koja su 3-valentna, 4-valentna ili 6-valentna, odnosno postoje jedina tri pravilna monohedralna popločavanja trouglovima, kvadratima i šestouglovima.

Dalje, posmatrajmo čvor u kojem se nalazi više od jednog tipa pravilnih mnogouglova. Prvo, primećujemo iz prethodnog da u čvoru ne može biti manje od tri ni više od šest pravilnih mnogouglova. Drugo, u čvoru ne može da bude više od četiri različita tipa pravilnih mnogouglova. Ako u jednom čvoru poređamo četiri različita pravilna mnogougla sa najmanjim unutrašnjim uglovima, kao što je trougao sa uglom od $60^0$, kvadrat sa uglom od $90^0$, petougao sa uglom od $108^0$ i šestougao sa uglom od $120^0$, dobijamo ukupan zbir od $378^0$ što je veće od $360^0$.

Posmatramo slučajeve:

**I slučaj:** Kada se u čvoru sastaju tri pravilna mnogougla;

Zbir unutrašnjih uglova 3 mnogougla oko čvora je $2\pi$ tj. dobija se jednačina

$$\left(\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\frac{n_3-2}{n_3}\right)\pi = 2\pi,$$

Posle sredjivanja dobijamo jednačinu

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}.$$

Rešenja koja zadovoljavaju datu jednačinu su sledeća (rešenja označena sa ** objasnićemo kasnije):

(1) 3.7.42 **
(2) 3.8.24 **
(3) 3.9.18 **
(4) 3.10.15 **
(5) 3.12.12

(6) 4.5.20 **
(7) 4.6.12 **
(8) 4.8.8
(9) 5.5.10 **
(10) 6.6.6

**II slučaj**: Kada se u čvoru sastaju četiri pravilna mnogougla;
Na isti način kao u prethodnom slučaju dobijamo jednačinu

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1$$

Rešenja koja zadovoljavaju datu jednačinu su sledeća (rešenja označena sa * objasnićemo kasnije):
(11) (i) 3.3.4.12 * (ii) 3.4.3.12 *
(12) (i) 3.3.6.6 * (ii) 3.6.3.6 *
(13) (i) 3.4.4.6 * (ii) 3.4.6.4
(14) 4.4.4.4
Na isti način dobijamo slučajeve III i IV

**III slučaj**: Kada se u čvoru sastaje pet pravilnih mnogouglova;

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}$$

(15) 3.3.3.3.6
(16) (i) 3.3.3.4.4 (ii) 3.3.4.3.4

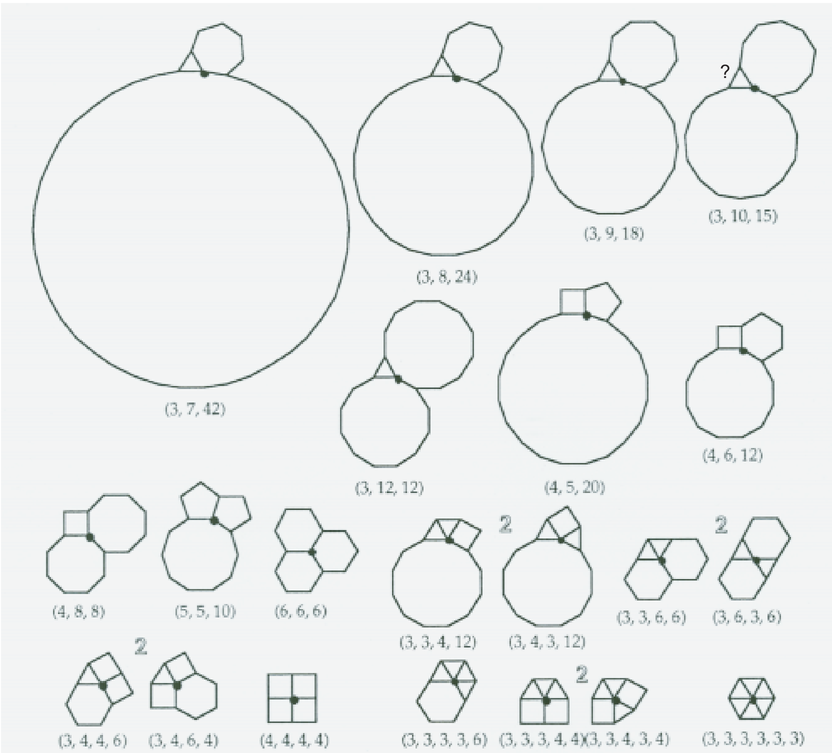
**IV slučaj**: Kada se sastaju šest pravilnih mnogouglova;

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2$$

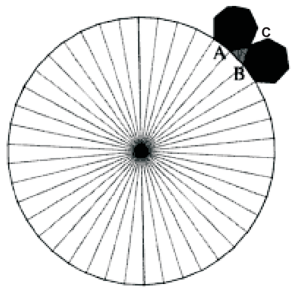
(17) 3.3.3.3.3.3.

Kao što je navedeno, pokrivanje ili okruživanje čvora bez preklapanja ili šupljina ima 17 rešenja (izbora poligona), znači 17 rešenja (izbora) zadovoljavaju 4 navedene jednačine. I svaki od ovih izbora predstavlja klasu čvora.

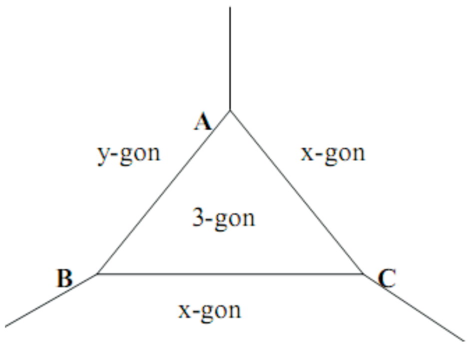
Može se videti da od četiri klase (11, 12, 13 i 16), postoje dva različita načina u kojima poligoni mogu biti poređani. Pozicija poligona je različita, dobijeni oblik i izgled je drugačiji. Posmatrajmo čvorove tipa (3.3.6.6) i (3.6.3.6) prikazane na slici 2.1.3. Oba pripadaju istoj klasi. Za tip (3.3.6.6) trouglovi su jedan pored drugog isto kao i šestouglovi, a za tip (3.6.3.6) trouglovi su jedan naspram drugog isto kao i šestouglovi. Za slučaj sa tri poligona, svi oni imaju jedan mnogougao različite vrste; bez obzira kako permutovali 3 poligona oko čvora izgled i oblik dobijenog pokrivanja ravni uvek je isti. Dakle, postoji 21 mogućih tipova čvorova.




Sl. 28: 21 mogući tip čvorova sa pravilnim mnogougaonim pločicama.




Sl. 29:




Sl. 30:

Slika 28 prikazuje 21 mogući tip čvorova sa pravilnim mnogougaonim pločicama.

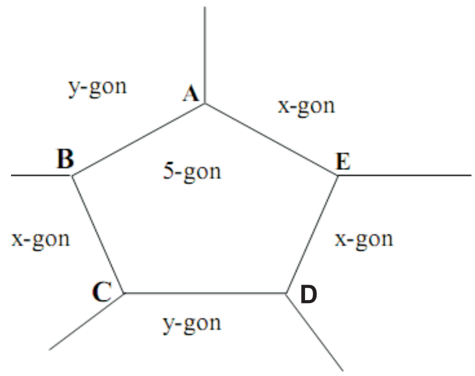
Ograničićemo se na ona popločavanja kod kojih su svi čvorovi istog tipa (iste valence). Kao što je gore navedeno, našli smo 21 moguć način kako bismo pravilne mnogouglove poređali oko čvora, bez preklapanja i šupljina. Cilj je da nađemo ukupan broj izogonalnih popločavanja ravni ivica-na-ivicu, koja za pločicu imaju pravilne mnogouglove.

Posmatrajmo sledeći primer:

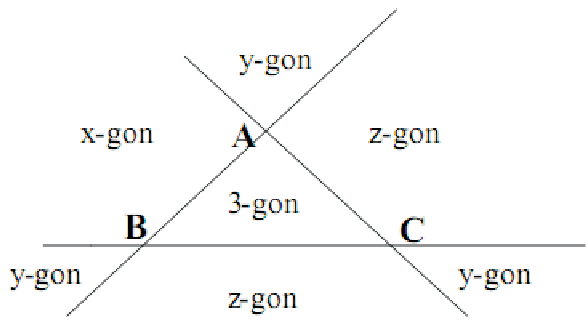
Ako uzmemo u obzir čvor tipa (3.7.42), šablon izgleda kao na slici 29. Pravilan mnogougao sa 42 strane je nacrtan sa radijalnim linijama koje bi pomogle razlikovanju strana (42-strani poligon veoma liči na krug). Da bi pokrivanje bilo izogonalno, u svakom čvoru mora se naći $\{3\}$, $\{7\}$ i $\{42\}$. Ako ove mnogouglove rasporedimo u čvorove $A$ i $B$, tada se u čvoru $C$ nalaze dva $\{7\}$ i jedan $\{3\}$. Dakle, nema prostora da se u čvoru $C$ smesti $\{42\}$, ne postoji izogonalno popločavanje ravni u kojem su svi čvorovi ovog tipa.

1) Ako je čvor tipa $(3.x.y)$

Neka je $ABC$ jednakostraničan trougao i neka je $x \leq y$. Posmatrajmo sliku 30 na kojoj su oba čvora $A$ i $B$ tipa $(3.x.y)$. Sa slike vidimo da je $C$ čvor tipa $(3.x.x)$ izogonalno popločavanje ravni koje za čvorove ima tip $(3.x.y)$ izogonalno popločavanje je moguće kada je $x = y$. Prema




Sl. 31:




Sl. 32:

tome klase čvorova (1), (2), (3) i (4) se ne mogu naću u nekom izogonalnom popločavanju.

2) Ako je čvor tipa $(x.5.y)$, $x \leq 5$

Uzmimo u obzir pravilan petougao $ABCDE$. Svi čvorovi su tipa $(x.5.y)$ osim čvora $E$, koji je tipa $(x.5.x)$. Isto kao u prethodnom razmatranju, čvor tipa $(x.5.y)$ je moguć samo kada je $x = y$. Klase čvorova (6) i (9) nisu moguće.

3) Ako je čvor tipa $(3.x.y.z)$

Na istin način dobijamo da je čvor ovog tipa moguć samo ako $x = z$. Prema tome čvorovi tipa (11)(i) i (ii), (12)(i) i (13)(i) nisu mogući.

**Teorema 2.2.** *Postoji tačno 11 različitih pokrivanja ivica-na-ivicu pravilnim mnogouglovima kod kojih su svi čvorovi istog tipa. To su* $(3^6)$, $(3^4.6)$, $(3^3.4^2)$, $(3^2.4.3.4)$, $(3.4.6.4)$, $(3.6.3.6)$, $(3.12^2)$, $(4^4)$, $(4.6.12)$, $(4.8^2)$ *i* $(6^3)$.

Zato sva rešenja (ukupno 10 od njih) označena sa * i ** nisu moguća i preostaje 11 tipova čvorova. Obično se 11 pokrivanja iz teoreme, nazivaju Arhimedovim[2] pokrivanjima (neki autori ih zovu homogena ili polupravilna), i naravno sadrže tri pravilna pokrivanja, slika 33. Mi ih zovemo "Arhimedova", što znači da su to pokrivanja samo sa jednim tipom čvora. Generalno može da bude i više od jednog tipa čvorova u pokrivanju. Ako pokrivanje ima $k$-tipova čvorova, takvo pokrivanje zvaćemo $k$-Arhimedovo pokrivanje.

Uočimo neke od specijalnih osobina Arhimedovih pokrivanja:

Pokrivanje u kojem su svi čvorovi tipa $(3^4.6)$ se javlja u dva oblika koji su jedan drugom slike u ogledalu. Kao što je navedeno u sekciji 1.2, dva pokrivanja su ekvivalentna ako postoji transformacija sličnosti ravni koja slika jedno pokrivanje na drugo. U stvari, osim za popločavanje $(3^4.6)$, refleksije nikad nisu potrebne za ostvarivanje ekvivalencije dva popločavanja istog tipa. Ali u slučaju $(3^4.6)$, refleksije su potrebne i opisujemo ovu situaciju tako što kažemo da se pokrivanje javlja u dva oblika koji su jedan drugom slike u ogledalu.

Slika 34 pokazuje $(3^4.6)$ pokrivanje. U (a) najviši žuti trougao klizi desnom stranom najnižeg plavog trougla. U (b) najviši žuti trougao klizi levom stranom najnižeg plavog trougla. Pokrivanje (a) je poznato kao verzija desne orijentacije, dok je pokrivanje (b) poznato kao verzija leve orijentacije.

Jedna vrlo bitna osobina Arhimedovih pokrivanja je da su izogonalna, kao što je pomenuto. Zato ih zovemo *uniformna*. Razlika izmedju ove dve reči je da se Arhimedova odnose na činjenicu da je pokrivanje monogonalno što je vrlo blisko tome da bilo koja dva susedna čvora izgledaju isto, dok termin uniformno implicira mnogo strogu osobinu izogonalnosti (ekvivalencije čvorova na osnovu simetrija pokrivanja). Značenje $k$-uniformno objasnićemo u sledećoj sekciji.

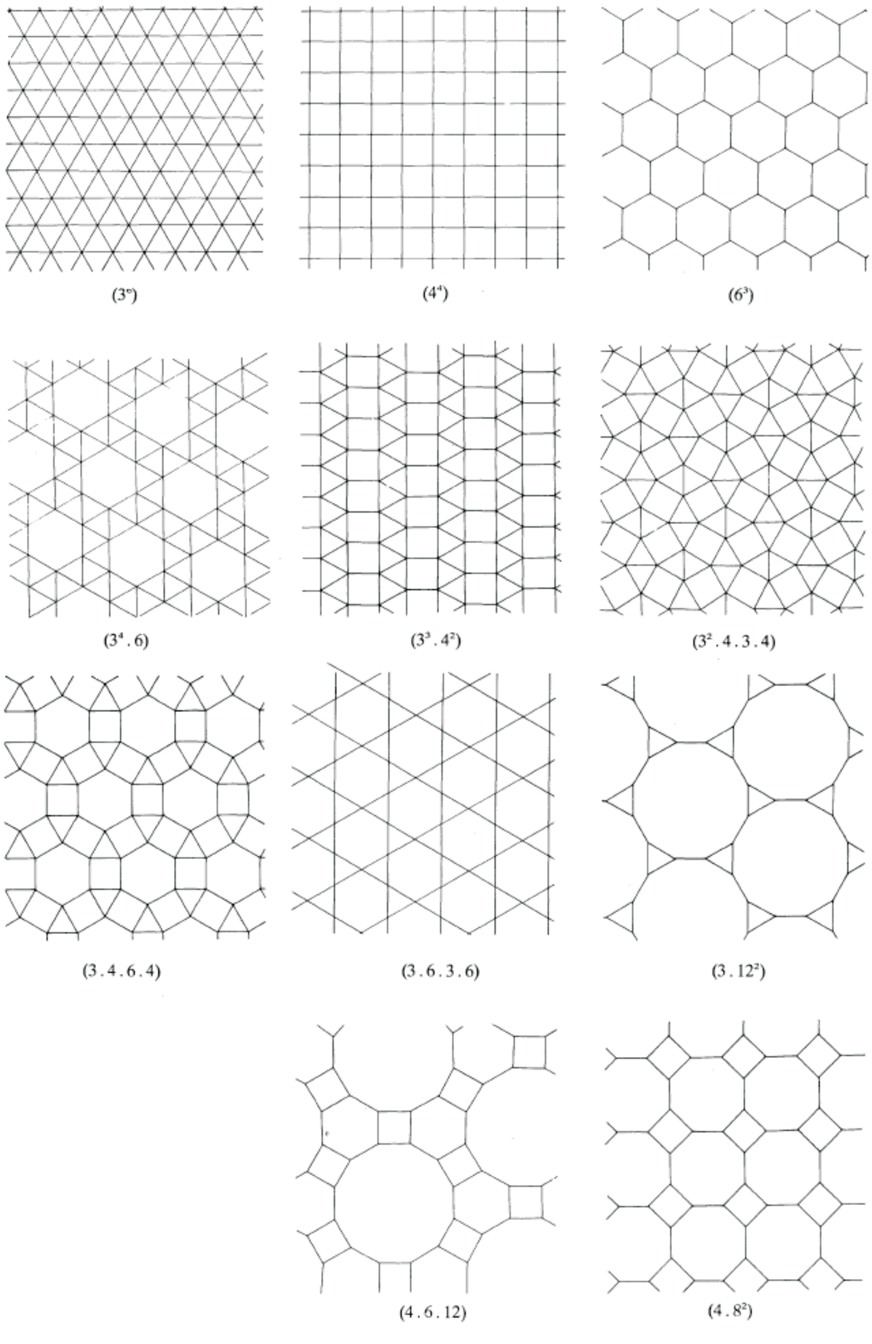
Vidimo razlike izmedju rešenja označena sa * i **. Takodje, ona se ne mogu proširiti do forme Arhimedovog pokrivanja. Ipak, ona rešenja označena sa * se mogu proširiti do forme ne-Arhimedovih pokrivanja (ne-Arhimedovo pokrivanje je pokrivanje sa više od jednim tipova čvorova), ali ona rešenja označena sa ** se ne mogu proširiti do forme ne-Arhimedovih pokrivanja, jer daju samo jedan čvor bez mogućnosti ponavljanja, kao što će biti objašnjeno.

Posmatrajmo čvor tipa (3.10.15) na slici 28. Kao što je prikazano, čvor $A$ je tipa (3.10.15). Čvor $B$ ima dve mogućnosti: ili je čvor tipa (3.10.15) ili čvor tipa $(3.x.y...15)$ gde su $x$ i $y$ stranice poligona oko čvora $B$. Posmatraćemo sve moguće tipove čvorova koji se mogu javiti. Uočićemo da možemo jedino imati tip (3.10.15). Isto možemo da kažemo i za čvor $C$. U čvoru $B$ poligon označen sa „?" može da ima 10 strana, ali u čvoru $C$ isti poligon ima 15 strana. Ovo nije moguće. Zato rešenja označena sa ** ne mogu da se prošire do forme pokrivanja.

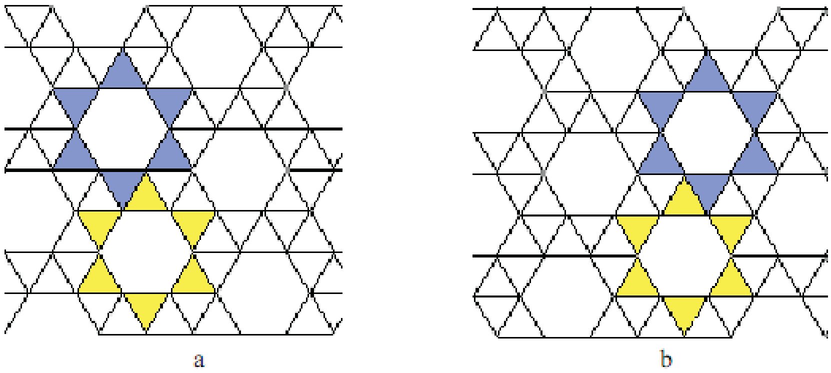
Zbog toga je ovde 21-6=15 vrsta čvorova koja se mogu javiti pri pokrivanju ravni sa pravilnim poligonima. U sledećoj sekciji videćemo da postoje pokrivanja sa kombinacijom čvorova tipa označena sa * i drugim tipovima čvorova kao što su $(3^6;\mathbf{3^2.4.12})$, $(3^6;\mathbf{3^2.6^2})$, $(\mathbf{3.4^2.6};3.4.6.4)$ i $(\mathbf{3.4.3.12};3.12^2)$ (čvorovi označeni sa * su podebljani).

Pokazaćemo, ako tražimo popločavanja ivica-na-ivicu koja se sastoje od pravilnih poligona i važi da su svi njihovi čvorovi iste klase umesto istog tipa čvorova, pokazaćemo da onda ima beskonačno mnogo popločavanja. To je već napomenuo Robbin (1887). Posmatrajmo sledeće

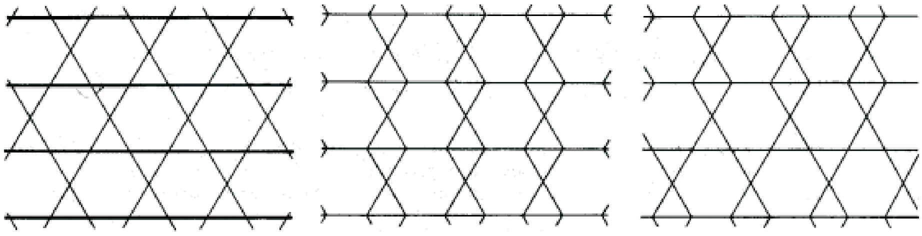
[2] Archimedes (287.p.n.e-212.p.n.e)




Sl. 33: 11 Arhimedovih pokrivanja.




Sl. 34:



Sl. 35:

primere:

(1) Ako se u svakom čvoru nalaze dva trougla i dva šestougla kao što je prikazano na slici 35, uniformno pokrivanje (3.6.3.6), može se preseći paralelnim linijama, na trake koje mogu da klize nezavisno jedna od druge. Na ovaj način dobijamo neprebrojivo beskonačno mnogo pokrivanja čiji su čvorovi iste klase (3.6.3.6) i (3.3.6.6).

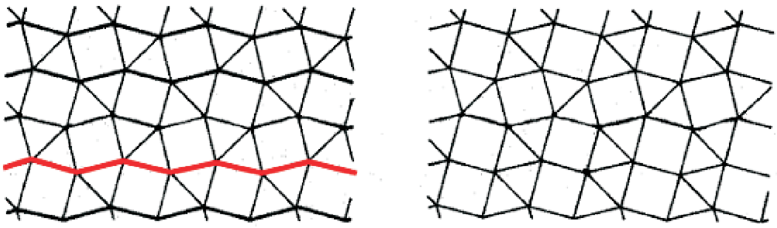
(2) Beskonačno mnogo različitih pokrivanja čvorova tipa ($3^2$.4.3.4) može se dobiti promenom međusobnih pozicija horizontalnih cik-cak traka u pokrivanju levo (slika 36).

(3) U uniformnom pokrivanju (3.4.6.4), rotiranjem diskova, koji su označeni levo, može se dobiti neprebrojivo beskonačno mnogo pokrivanja sa svim klasama čvorova (3.4.6.4) i (3.4.4.6) (slika 37).

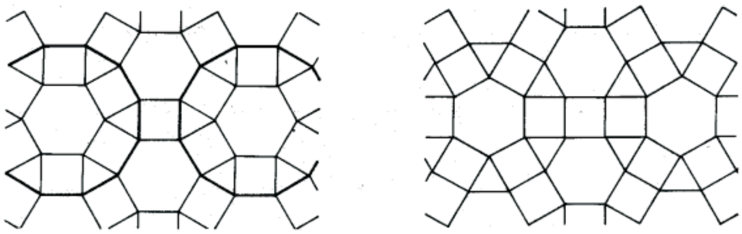
## 2.2 $k$-Uniformno popločavanje

Popločavanje pločicama pravilnih poligona je $k$-uniformno ako i samo ako je $k$-izogonalno (u sekciji 1.5 smo rekli da je popločavanje $k$-izogonalno ako njegovi čvorovi formiraju tačno $k$-tranzitivnih klasa u odnosu na grupe simetrija popločavanja). Uniformna popločavanja su 1-uniformna. Primer je prikazan slikom na osnovu ove definicije.

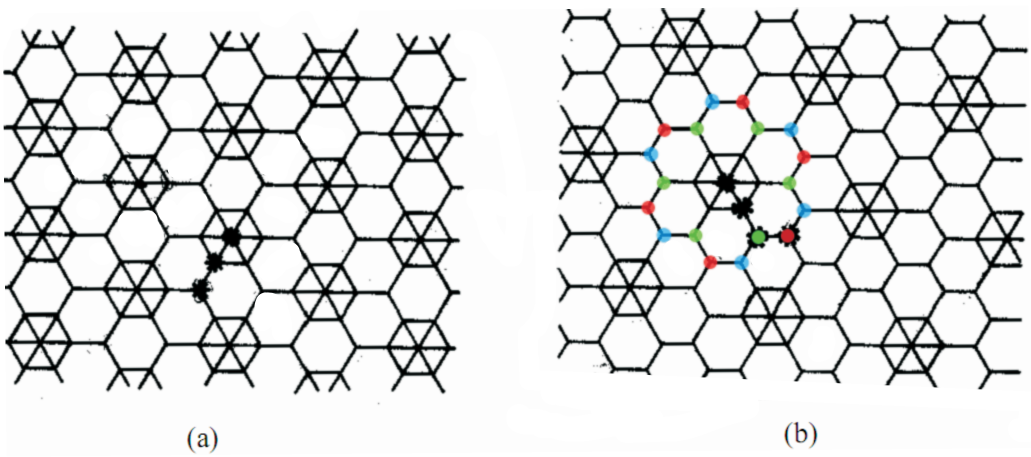
Pogledajmo sliku 38.



Sl. 36:



Sl. 37:





Sl. 38:

Oba popločavanja se sastoje od tri tipa čvorova, $(3^6)$, $(6^3)$ i $(3^2.6^2)$. Dakle, znamo da ova 2 popločavanja moraju biti najmanje 3-uniformna.

Na slici 38(a) čvor tipa $(3^6)$ može se preslikati na neki drugi translacijom. Dakle oni formiraju jednu tranzitivnu klasu. Čvor tipa $(6^3)$ može se preslikati na neki drugi rotacijom za $\frac{\pi}{3}$, a zatim translacijom; dakle formiraju jednu tranzitivnu klasu. Na sličan način čvor tipa $(6^3)$, i čvor tipa $(3^2.6^2)$ formiraju jednu tranzitivnu klasu. Ukupno se javljaju 3-tranzitivne klase, dakle, zaključujemo da je slika 38(a) 3-uniformna.

Isto na slici 38(b), čvorovi tipa $(3^6)$ i tipa $(3^2.6^2)$ formiraju po jednu tranzitivnu klasu. Ipak, čvorovi tipa $(6^3)$ formiraju 3 tranzitivne klase kao čvorovi označeni crvenim, zelenim i plavim tačkama koji se mogu preslikati jedan u drugi rotacijom $\frac{\pi}{3}$ i svi oni translacijom mogu biti preslikani u odgovarajuće čvorove tipa $(6^3)$. Slika 38(b) ima 5 tranzitivnih klasa. Ono je 5-uniformno.

Ako su tipovi čvorova $k$-tranzitivne klase $a_1.b_1.c_1...; a_2.b_2.c_2...; ....; a_k.b_k.c_k...$ popločavanje će biti označeno simbolom $(a_1.b_1.c_1...; a_2.b_2.c_2...; ....; a_k.b_k.c_k...)$; sa očiglednim skraćivanjem upotrebom eksponenta (na primer, možemo pisati 3.3.3.3.3.3 kao $3^6$) i sa donjim indeksom obeležavamo različita popločavanja u kojima se pojavljuju čvorovi istog tipa.

Daćemo bez dokaza sledeći rezultat koji je dao Krotenheerdt.

**Teorema 2.3.** *Postoji 20 različitih tipova 2-uniformnih ivica-na-ivicu popločavanja pravilnim poligonima, i to:*
$(3^6; 3^4.6)_1$, $(3^6; 3^4.6)_2$, $(3^6; 3^3.4^2)_1$, $(3^6; 3^3.4^2)_2$, $(3^6; 3^2.4.3.4)$, $(3^6; 3^2.4.12)$, $(3^6; 3^2.6^2)$, $(3^4.6; 3^2.6^2)$, $(3^3.4^2; 3^2.4.3.4)_1$, $(3^3.4^2; 3^2.4.3.4)_2$, $(3^3.4^2; 3.4.6.4)$, $(3^3.4^2; 4^4)_1$, $(3^3.4^2; 4^4)_2$, $(3^2.4.3.4; 3.4.6.4)$, $(3^2.6^2; 3.6.3.6)$, $(3.4.3.12; 3.122)$, $(3.4^2.6; 3.4.6.4)$, $(3.4^2.6; 3.6.3.6)_1$, $(3.4^2.6; 3.6.3.6)_2$ *i* $(3.4.6.4; 4.6.12)$.

Na slici 39 prikazano je 20 različitih tipova 2-uniformnih popločavanja ivica-na-ivicu.

U nizu svojih radova, Krotenheerdt je detaljno izučavao ona $k$-uniformna popločavanja kod kojih se $k$-tranzitivnih klasa čvorova sastoje od $k$ različitih tipova čvorova. Ako sa $K(k)$ označimo broj različitih Krotenheerdt-ovih popločavanja, njegovi rezultati su $K(1) = 11$, $K(2) = 20$, $K(3) = 39$, $K(4) = 33$, $K(5) = 15$, $K(6) = 10$, $K(7) = 7$, i $K(k) = 0$ za sve $k \geq 8$.

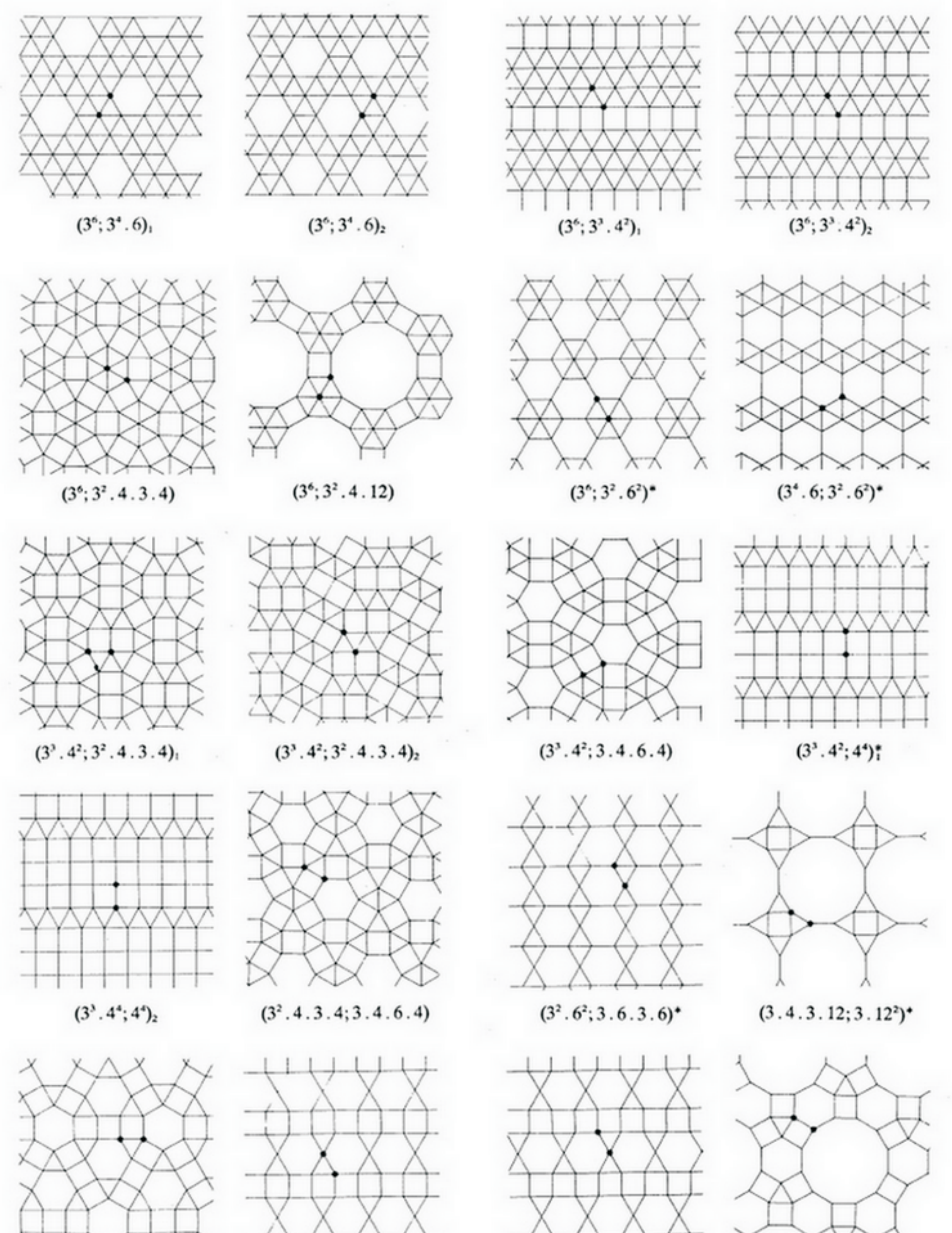
Za $k = 1$ i $k = 2$, Krotenheerdt-ova popločavanja se podudaraju sa uniformnim i 2-uniformnim popločavanjima (primedba na kraju ovog odeljka).

Primeri Krotenheerdt-ovih popločavanja za $k = 3, 4, 5, 6$, i 7 prikazani na slici 40.

Bez uvođenja Krotenheerdt-ovog uslova čak i za malo $k$, kao što je $k = 4$, neće biti poznato koliko $k$-uniformnih popločavanja postoji, niti je dostupna asimptotska procena broja $k$-uniformnih popločavanja za veliko $k$.

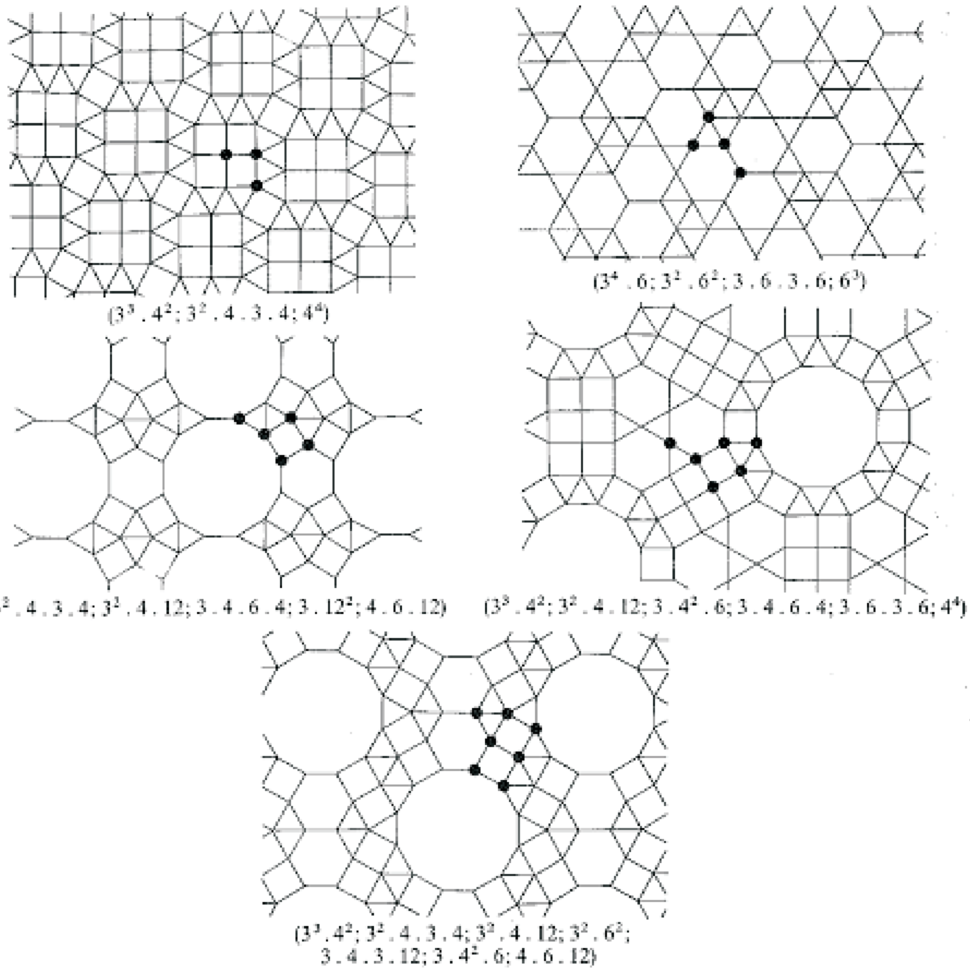
*Napomena:* za $k$-uniformna i $k$-Arhimedova popločavanja

(1) Ako je popločavanje $m$-Arhimedovo i $n$-uniformno za $m \leq n$, znači da popločavanje ima $m$ različitih tipova čvorova i takođe mora da bude najmanje $m$-uniformno, što znači da svaki tip čvorova formira jednu tranzitivnu klasu. Kada je $m = n$ tada je Krotenheerdt-ovo popločavanje.



$(3^6; 3^4.6)_1$
$(3^6; 3^4.6)_2$
$(3^6; 3^3.4^2)_1$
$(3^6; 3^3.4^2)_2$
$(3^6; 3^2.4.3.4)$
$(3^6; 3^2.4.12)$
$(3^6; 3^2.6^2)^*$
$(3^4.6; 3^2.6^2)^*$
$(3^3.4^2; 3^2.4.3.4)_1$
$(3^3.4^2; 3^2.4.3.4)_2$
$(3^3.4^2; 3.4.6.4)$
$(3^3.4^2; 4^4)_1^*$
$(3^3.4^4; 4^4)_2$
$(3^2.4.3.4; 3.4.6.4)$
$(3^2.6^2; 3.6.3.6)^*$
$(3.4.3.12; 3.12^2)^*$
$(3.4^2.6; 3.4.6.4)$
$(3.4^2.6; 3.6.3.6)_1$
$(3.4^2.6; 3.6.3.6)_2^*$
$(3.4.6.4; 4.6.12)^*$


Sl. 39:


$(3^3 . 4^2; 3^2 . 4 . 3 . 4; 4^4)$
$(3^4 . 6; 3^2 . 6^2; 3 . 6 . 3 . 6; 6^3)$
$(3^2 . 4 . 3 . 4; 3^2 . 4 . 12; 3 . 4 . 6 . 4; 3 . 12^2; 4 . 6 . 12)$
$(3^3 . 4^2; 3^2 . 4 . 12; 3 . 4^2 . 6; 3 . 4 . 6 . 4; 3 . 6 . 3 . 6; 4^4)$
$(3^3 . 4^2; 3^2 . 4 . 3 . 4; 3^2 . 4 . 12; 3^2 . 6^2;$
$3 . 4 . 3 . 12; 3 . 4^2 . 6; 4 . 6 . 12)$

Sl. 40:

(2) Možemo videti da su sva Arhimedova popločavanja, njih 11 na slici 33, 1-uniformna (iako na slici ima 12 popločavanja jer se $(3^4.6)$ se javlja u 2 forme koje su kao slike u ogledalu). Svih 11 Arhimedovih popločavanja su 1-uniformna, tako da za $k = 1$ ne postoji razlika između 1-Arhimedovih i 1-uniformnih popločavanja.

(3) Takođe primetićemo, da ima 20 različitih tipova 2-uniformnih ivica-na-ivicu popločavanja ravni pravilnim mnogouglovima. Ipak za razliku od slučaja za $k = 1$, ovde je beskonačan broj 2-Arhimedovih popločavanja. To je prikazano u prethodnom delu za $(3^3.4^2)$ i $(3^2.4.3.4)$; $(3^2.6^2)$ i $(3.6.3.6)$ ili $(3.4^2.6)$ i $(3.4.6.4)$, gde postoji beskonačno mnogo različitih 2-Arhimedovih popločavanja.

# Literatura


[1] P. S. Aleksandrov, *Uvod u teoriju grupa*, Beograd, 1982.

[2] S. Dutch, *Uniform Tilings*, http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/uniftil.htm.

[3] B. Galebach, *n-Uniform Tilings*, http://www.probabilitysports.com/tilings.html.

[4] M. Ghyka, *The Geometry of Art and Life*, New York, Dover, 1977.

[5] B. Grünbaum, G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W.H. Freeman and Company, New York, 1987.

[6] S. V. Jablan, *Symmetry, Ornament and Modularity*, World Scientific, 2002.

[7] B. Kell, *Symmetry and tilings*, http://math.cmu.edu/~bkell/21110-2010s/symmetry-tilings.html.

[8] N. Lay Ling, *Honours project Tilings and paterns*, Department of Mathematics National University of Singapore, 2003/2004.

[9] S. Stein, S. Szabó, *Algebra and Tiling*, Math. Assoc. Amer., Washington DC, 1994.

[10] S. V. Jablan, *Symmetry and ornament*, http://www.emis.de/monographs/jablan/index.html.

[11] E. W. Weisstein, *Tessellation*, http://mathworld.wolfram.com/Tessellation.html.

[12] E. W. Weisstein, *Uniform Tessellation*, http://mathworld.wolfram.com/UniformTessellation.html.